Vektoranalyse - Formelsamling

Christian Andersen

January 14, 2010

Introduktion

Denne formelsamling er skrevet ud fra "James Steward - Calculus concepts and contexts" med vektoranalyseeksamen ved Århus Universitet for øje. Målet er at opskrive alle de relevante formler mere overskueligt end [S], så de er nemmere at finde til eksamen. Bemærk at dette ikke er pensum og skal ikke bruges som en erstatning til eksamensoplæsningen. Der tages desuden forhold for eventuelle stavefejl, trykfejl, matematisk fejl og diverse mangler. Rettelser kan sendes til ctc@ctcsite.dk

Vektorfelter

Definition:
Et vektorfelt på $\mathbb{R}^3$ er en funktion $\mathbf{F}$ der sender ethvert punkt (x, y, z) ind i en 3-dimensionel vektor $\mathbf{F}(x, y, z)$.

Gradient:
Et gradient vektorfelt er givet ud fra funktionen f så

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)\mathbf{k} \tag{1}$$

Rotation af vektorfelter
Rotationen eller curl af et vektorfelt $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ givet på hele $\mathbb{R}^3$ med P, Q og R havende kontinuerte partielle afledte så findes

$$\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathbf{k} \tag{2}$$

Det bemærkes i [S] 13.5.3 at

$$\text{curl}(\nabla f) = \mathbf{0} \tag{3}$$

Divergens af vektorfelter
Hvis $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ givet på hele $\mathbb{R}^3$ og de partielle afledte eksisterer så er divergensen af $\mathbf{F}$ givet som

$$\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{4}$$

Det bemærkes i [S] 13.5.11 at

$$\text{div curl } \mathbf{F} = 0 \tag{5}$$

Laplace-operator
Divergensen af gradienten til en funktion kaldes Laplace operatoren(∇^2) på funktionen

$$\text{div}(\nabla f) = \nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \tag{6}$$

Linie-integraler

Et integrale langs en kurve C er givet ved [S]13.2.3. x og y skal her parametriceres så de udtrykkes som funktion af t

$$\int_C f(x,y)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}\,dt \tag{7}$$

Har man 3 dimensioner så er det lignende

$$\int_C f(x,y,z)\,ds = \int_a^b f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\,dt \tag{8}$$

Linie-integraler af vektorfelter
Har vi et vektorfelt $F = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ kan man integrere langs en kurve C vha. [S]13.2.13

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_a^b \mathbf{F}(\mathbf{r}(t))\cdot \mathbf{r}'(t)\,dt \tag{9}$$

hvor $\mathbf{r}(t)$ udtrykker kurven C. Dette kan også skrives som

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int P\,dx + Q\,dy + R\,dz \tag{10}$$

Dette er relevant at bruge til f.eks. at regne arbejde udført af en kraft, da $W = \int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$.

De fundamentale sætninger for linie-integraler

Hvis vi har et gradient-vektorfelt kan linie-integralet langs kurven C, beskrevet med vektorfunktionen $\mathbf{r}(t)$ og $a \le t \le b$, udregnes som ([S] 13.3.2)

$$\int_C \nabla f\cdot d\mathbf{r} = f(\mathbf{r}(b)) - f(\mathbf{r}(a)) \tag{11}$$

Det bemærkes her at hvis C_1 og C_2 er forskellige men har samme start- og slutpunkt er $\int_{C_1}\nabla f\cdot d\mathbf{r} = \int_{C_2}\nabla f\cdot d\mathbf{r}$. Dette kaldes uafhængighed af vej. Lad nu $\mathbf{F}$ være et vektorfelt i et kontinuert åben sammenhængende område. Så siges $\mathbf{F}$ at være konservativt, hvis det kan skrives som gradienten af en (potential)funktion dvs ([S] 13.3.4)

$$\nabla f = \mathbf{F} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ konservativt} \tag{12}$$

Det betyder endvidere at

$$\mathbf{F} \text{ konservativt} \Rightarrow \text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0} \tag{13}$$

Vi har endvidere en sætning [S] 13.3.6) der giver os at hvis vores vektorfelt $\mathbf{F}(x,y) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ er givet på et åben enkeltsammenhængende område og P og Q har kontinuerte afledte så gælder

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \Leftrightarrow \mathbf{F} \text{ konservativt} \tag{14}$$

Greens sætning

Lad C være en positivt orienteret stykvis glat simpel lukket kurve i et plan og lad D være planen omsluttet af C. Hvis P og Q har kontinuerte afledte så er

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dA \tag{15}$$

eller skrevet som

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_D (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dA \tag{16}$$

Areal
Ud fra Greens sætning kan følgende formler for areal af området D findes [S]13.4.5

$$A = \oint_C x\,dy = -\oint_C y\,dx = \frac{1}{2}\oint_C x\,dy - y\,dx \tag{17}$$

Overfladeintegraler

Vi har en overflade parametriceret ved $\mathbf{r}(u,v)$, hvilket giver os størrelserne $\mathbf{r}_u = \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\mathbf{j} + \frac{\partial x}{\partial u}\mathbf{k}$ og ligeledes findes $\mathbf{r}_v$. Overfladeintegralet kan nu findes som ([S] 13.6.2)

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u,v))|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, dA \tag{18}$$

Er z en funktion af x og y så $z = g(x,y)$ så kan overfladeintegralet regnes som

$$\iint_S f(x,y,z)dS = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA \tag{19}$$

Hvis $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ nu er et kontinuert vektorfelt defineret på en orienteret overflade S med enhedsnormalvektoren $\mathbf{n}$ så er

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS \tag{20}$$

det vil sige

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) \, dA \tag{21}$$

Har vi at overfladen kan beskrives ved $z = g(x,y)$ så får vi

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iint_D \left(-P\frac{\partial g}{\partial x} - Q\frac{\partial g}{\partial y} + R\right) dA \tag{22}$$

Stokes Sætning

Lad S være en orienteret stykvis glat overflade der er omsluttet af en simpel lukket stykvis glat kurve C med *positiv orientering*. Lad $\mathbf{F}$ være et vektorfelt med kontinuerte partielle afledte på et åbent område i $\mathbb{R}^3$ der indeholder S. Så er

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \tag{23}$$

Bemærk at hvis både S_1 og S_2 begge opfylder betingelserne for Stokes og begge har randkurven C så gælder

$$\iint_{S_1} \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \iint_{S_2} \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \tag{24}$$

Bemærk at stokes sætning også fortæller os at linie-integralet for en lukket kurve i et konservativt vektorfelt giver 0 pga af formel (3)

Divergenstheoremet

Lad E være en simpel-solidt område og lad S være den omsluttende overflade af E givet med positiv (udadrettet) orientering. Lad $\mathbf{F}$ være et vektorfelt med kontinuerte partielle afledte defineret på et åbent område der indeholder E. Så gælder

$$\iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_E \operatorname{div} \mathbf{F} \, dV \tag{25}$$

Dette kan bruges til f.eks. at regne volumen af figurs overflade. Lad $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ så giver divergenstheoremet os at

$$V = \frac{1}{3} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \tag{26}$$

Triple-integraler

For at regne volumen-integralet i divergenstheoremet er der ofte brug for cylindriske eller sfæriske koordinater. Har vi cylindriske, dvs $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ og $z = z$, så gælder ([S] 12.8.2) at

$$\iiint_E f(x,y,z)dV = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} \int_{z_1(r\cos\theta, r\sin\theta)}^{z_2(r\cos\theta, r\sin\theta)} f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\, r\, dz\, dr\, d\theta \tag{27}$$

Arbejder vi i stedet i sfæriske koordinater, dvs $x = r\sin\phi\cos\theta$, $y = r\sin\phi\sin\theta$ og $z = r\cos\theta$, så gælder ([S] 12.8.4)

$$\iiint_E f(x,y,z)\, dV = \int_{\phi_1}^{\phi_2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \int_{r_1}^{r_2} f(r\sin\phi\cos\theta, r\sin\phi\sin\theta, r\cos\theta)\, r^2\, \sin\phi\, dr\, d\theta\, d\phi \tag{28}$$

Tips til Løsning af Opgaver

De vigtigste sætninger er Greens Sætning, Stokes sætning og Divergenssætningen. Er du i tvivl så se om en af disse sætninger kan bruges. **EKS:** Vi ønsker at finde et linje integraler af et vektorfelt. Hvis det viser sig at rotationen af dette vektorfelt er meget pænt, kan man bruge Stokes sætning, ved at konstruere en smart overflade.

Derudover er det vigtigt at genbruge delopgaver. **EKS:** hvis der i opgave a) er vist at et vektorfelt er konservativt, så skal det nok bruges til at løse opgave b).

Husk på egenskaberne ved curl og div. **EKS:** hvis vi ved at vektorfeltet er konservativt, så er curl 0 eller hvis vektorfeltet kan skrives som curl af et andet, så er divergensen af det 0.

Kan man ikke umiddelbart bruge den sætning man allermest vil bruge, så prøv at lave smarte overflader eller volumener, hvor betingelserne er opfyldt. **EKS:** Du vil finde linie-integralet af et vektorfelt langs en kurve, men midt i kurven er vektorfeltet ikke defineret, så vi kan ikke umiddelbart bruge Stoke. Konstruer i stedet en overflade der har kurven som en delkurve.

Omkring gerne til cylindriske eller sfæriske koordinater og udnyt at integralet af cos og sin over et hel-talligt interval er 0 eller at sin er en ulige funktion og cos er en lige funktion. Der kan nogle gange gøre livet nemmere.