Den harmoniske oscillator

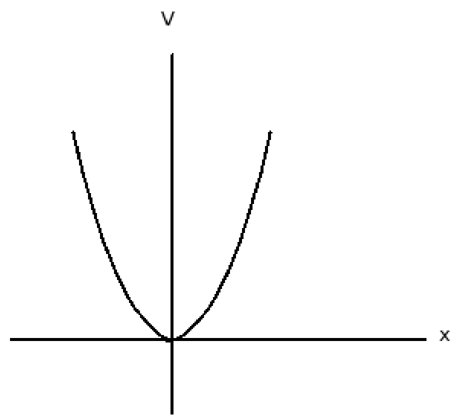
Christian Andersen

April 13, 2010

Den kvantemekaniske harmoniske oscillator er en kvantemekanisk partikel fanget i et potentialle givet ved

$$V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

Dette ser ud som skitseret her:



Som ved ethvert andet potentialle starter vi med at finde de stationære tilstande for potentialle, dvs partikler hvor middelværdien af partiklens position ikke ændre sig i tiden. Vi skal altså løse ligningen

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2\psi = E\psi$$

Dette kan løses på 2 måder, hvor løsningerne (selvfølgelig) er ækvivalente, men alligevel forskellige.

Den analytiske metode

I denne del af løsningen gælder det om at "brute force" sig til en løsning. Dette gøres ved at indføre den dimensionsløse variabel

$$\xi = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}x$$

og så omskrive den stationære shrödingerligning til

$$\frac{d^2\psi}{d\xi^2} = (\xi^2 - K)\psi$$

med $K = \frac{2E}{\hbar\omega}$. Der løses nu ved hjælp af potensrækker og der kommes frem til følgende egenenergier

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right) \text{for } n = 0, 1, 2, \dots$$

mens der findes frem til følgende egentilstande

$$\psi_n = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} H_n(\xi) e^{-\xi^2/2}$$

Her er $H_n(\xi)$ hermite polynomier som til enhver tid kan slåes op i schaums eller udregnes ved hjælp af formler man også kan slå op. Grundlæggende er det vigtige blot at det er n'te grads polynomier.

Algebragisk metode

Denne metode er den vigtigste, da den er nemmest at regne med. Opgaven er her at prøve at factorisere Scrödinger ligningen for at finde egentilstandene, ved først at omskrive til

$$\frac{1}{2m}(p^2 + (m\omega x)^2)\psi = E\psi$$

og så førsøge at skrive $(p^2 + (m\omega x)^2)$ som et produkt af to simple udtryk. Det ville givet vis være nemt hvis vi blot havde tal, men p og x er her operatorer. Dog ønsker vi at undersøge størrelserne

$$a_\pm = \frac{1}{\sqrt{2\hbar m\omega}}(\mp ip + m\omega x)$$

Ved en hurtig udregning ses det at

$$a_- a_+ = \frac{1}{2m\hbar\omega}(p^2 + (m\omega x)^2)\psi - \frac{i}{2\hbar}[x, p] \qquad = \frac{1}{\hbar\omega} H - \frac{i}{2\hbar}[x, p]$$

hvor $[x, p] = xp - px$ er kommutatoren af x og p. En udregning viser at følgende to udtryk

$$[x, p] = i\hbar$$
$$[a_-, a_+] = 1$$

så derfor får vi nu ligningenerne

$$
\begin{aligned}
H &= \hbar\omega\Big(a_-a_+ - \frac{1}{2}\Big) \\
&= \hbar\omega\Big(a_+a_- + \frac{1}{2}\Big)
\end{aligned}
$$

Ved hjælp af det vises at a_+ og a_- kan bruges som stepoperatorer således at

$$
\begin{aligned}
H(a_+\psi) &= (E + \hbar\omega)(a_+\psi) \\
H(a_-\psi) &= (E - \hbar\omega)(a_-\psi)
\end{aligned}
$$

Man ville dog selvfølge ikke have negative energier, dvs. det er begrænset hvor mange gange man kan trække $\hbar\omega$ fra E. Det giver at der findes grundtilstand ψ_0 så $a_-\psi_0 = 0$ og det kan bruges til at udregne ψ_0. Dermed får man

$$
\psi_0(x) = \Big(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\Big)^{(1/4)} e^{-\frac{m\omega}{2\hbar}x^2}
$$

med

$$
E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega
$$

Man kan nu bruge stepoperatorerne til at udregne de andre egentilstande ved

$$
a_+\psi_n = \sqrt{n+1}\psi_{n+1} \qquad\qquad a_-\psi_n = \sqrt{n}\psi_{n-1}
$$

Dermed finder man egentilstandene og egenenergiener

$$
\psi_n = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a_+)^n\psi_0 \qquad\qquad E_n = \Big(\frac{1}{2} + n\Big)\hbar\omega
$$

De sidste pointer

Ligesom for ethvert andet potentialle kan vi nu bruge vore egentilstande til at beskrive enhver tilstand til enhver tid da

$$
\Psi(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n e^{-iEt/\hbar}
$$

En anden væsentlig pointe er stepoperatorer som kan bruges til at finde enhver anden fysisk operator, da

$$
x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}(a_+ + a_-) \qquad\qquad p = i\sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}(a_+ - a_-)
$$

og enhver anden fysisk størrelse kan udtrykkes ved hjælp af x og p.